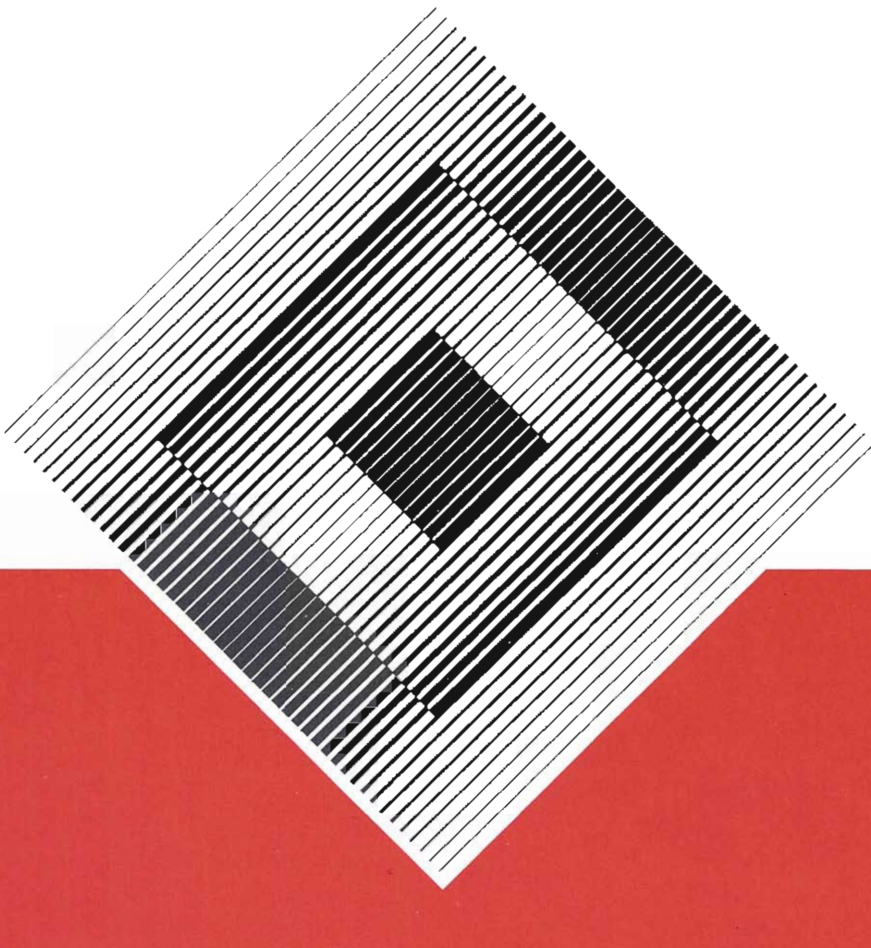
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 17 B - N. 4 - AGOSTO 1994

Rivista mensile. - Spedizione P.T. Vicenza/50% - Tiratura inferiore a 20.000 copie



Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4 - 31010 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso)

 VOL. 17B - N.4
AGOSTO 1994

INDICE
SEZ. B

METODI DELLA GEOMETRIA DEL SECOLO XIX

Carlo Felice Manara

VOL. 17B - N.4
AGOSTO 1994

.METODI DELLA GEOMETRIA DEL SECOLO XIX.

Carlo Felice Manara
Professore Emerito
Università Statale - Milano

"...c'est n'estimer rien qu'estimer tout le monde"
[*Molière . Le misanthrope. Acte I.*]

1 - Il metodo della geometria greca.

Si potrebbe dire che la matematica greca, ed in particolare la geometria, è ammirabile a doppio titolo: non soltanto per la massa dei risultati, che fanno della geometria greca un monumento inarrivabile di creatività, di chiarezza e di rigore espositivo, ma anche per la problematica epistemologica che ha impostato.
Infatti i Greci hanno non soltanto meditato sulla matematica e sulla geometria, ma anche sulle ragioni che fondano i legami delle conclusioni con le premesse. Quindi i Greci hanno non soltanto meditato sulla logica, intesa come strumento di ricerca della verità ed in particolare di ragionamento rigoroso, ma anche sulla migliore maniera per applicare questi strumenti nella ricerca, nella dimostrazione dei teoremi e nella soluzione dei problemi.
E' anche noto che la matematica greca aveva analizzato queste procedure prendendo in considerazione due loro momenti, quasi due movimenti in direzione opposta, che sono ancora oggi chiamati dell'analisi e della sintesi.

Non sto a richiamare ed ad illustrare nei particolari questa procedura, e mi limito a citare quanto un grande maestro, Federigo Enriques, ha scritto sinteticamente su di essa:
« La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa "analisi" si comincia a supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono poi successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali viene risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema R che si sappia risolvere. La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (e quindi è in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema, ma non tutte.
Il significato greco dell'analisi dei problemi si è evoluto nel progresso

moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.
Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo di Cartesio ha ricevuto il nome di "geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc. ».

L'esposizione della metodologia classica da parte di Enriques non poteva essere più chiara; mi pare tuttavia che a questa presentazione si possano aggiungere alcune osservazioni riguardanti il ruolo della fantasia creatrice nella costruzione di una teoria geometrica. Ovviamente tali considerazioni non possono essere fatte nel momento in cui si presenta la procedura di ricerca nella sua sistemazione astratta; ma io penso che debbano essere ricordate quando si passa a descrivere il momento reale e concreto della costruzione di un sistema teorico, soprattutto se un sistema cosiffatto riguarda una scienza come la geometria nella quale la elaborazione fantastica ha una così grande parte nella costruzione degli oggetti di considerazione e di ricerca.
Ritorneremo nel seguito su queste idee, quando parleremo dei tentativi di codificare le procedure della immaginazione, per erigerle a metodo di dimostrazione in geometria.

2 - La geometria analitica.

Non mi soffermerò qui a soppesare l'importanza della invenzione dei metodi che oggi sono abitualmente richiamati come "geometria analitica". Mi limito a qualche osservazione, che riguarda l'impostazione particolare e il campo molto ristretto nel quale vorrei mantenere queste mie considerazioni.
Anzitutto si potrebbe fare una osservazione banale; ricordare cioè che questa dottrina è stata presentata come una conseguenza particolare della esposizione che il suo autore faceva in generale del problema metodologico.

Nelle esposizioni scolastiche del "Discorso sul metodo"', fatte dai professori di filosofia, di solito il capitolo sulla geometria viene trascurato; ma io penso invece che esso sia una parte integrante ed importante dell'opera cartesiana, perché fornisce i contenuti esemplari delle considerazioni che la precedono.
Ma, oltre a queste osservazioni del tutto banali, vorrei ricordare quanto dice Enriques nel passo citato poco fa; ivi il geometra italiano ricorda che l'aggettivo "analitica", che a questo capitolo della matematica viene

solitamente oggi attribuito, esprime il fatto che essa è una particolare realizzazione, con gli strumenti della matematica post-greca, della procedura di analisi che già la filosofia e la matematica dei Greci avevano elaborato e, per così dire, codificato.
E' facile osservare che la profonda rivoluzione nei metodi geometrici, apportata dalla geometria analitica, fu resa possibile dalla maturazione dei metodi dell'algebra: questa dottrina infatti possedeva a quell'epoca gli strumenti per l'elaborazione dei calcoli, ed in particolare per l'indicazione delle operazioni sui numeri e per la codificazione delle loro proprietà formali. Pertanto, qualora gli enti geometrici siano stati rappresentati per mezzo di numeri (come avviene con le convenzioni dei metodi analitici) gli sviluppi dei calcoli (con l'applicazione delle regole sintattiche dei simboli adottati) costituiscono una deduzione, fatta in modo particolare, e quindi realizzano concretamente quel momento di analisi che già la geometria greca - come abbiamo visto - aveva riconosciuto come essenziale per la dimostrazione e per la soluzione dei problemi.
In questo ordine di idee quindi, la matematica, nei suoi sviluppi algoritmici, si presenta con quell'aspetto di "Logica perfezionata" che già G. Peano le aveva riconosciuto.Pertanto si potrebbe dire che il grande progresso sulla geometria greca si ottiene non nel quadro della metodologia generale della costruzione teorica, ma nell'impiego di strumenti deduttivi perfezionati, che permettono una sorta di automatismo nella deduzione, e quella controllabilità generale, che sono garanzie della certezza deduttiva.

3 - La geometria proiettiva.

Per incontrare una innovazione della metodologia geometrica, che abbia la importanza e il numero di conseguenze paragonabili con quelle della introduzione della geometria analitica, occorre attendere fino al secolo XIX. Questo mi appare particolarmente notevole non soltanto per il numero imponente di risultati che la geometria conseguì ma anche per la grande innovazione nei metodi che avvenne in quell'epoca. Mi soffermerò soprattutto su questo aspetto della evoluzione del pensiero matematico, perché ritengo che esso sia di importanza grandissima anche per l'influenza che ebbe sugli altri campi della scienza matematica. Io sono convinto infatti che l'invenzione delle geometrie non-euclidee, ed in particolare la questione della loro compatibilità e consistenza, abbia esercitato un influsso determinante non soltanto sugli studi riguardanti i fondamenti dell'intera matematica, ma anche sull'assetto di questa intera scienza, e sull'immagine che essa ha di se stessa.
Cercherò di dare di questo argomento una trattazione che metta in evidenza quelli che io ritengo gli episodi fondamentali e qualificanti, anche se in questo modo il mio discorso potrà presentare qualche lacuna, dal punto di vista della completezza della informazione strettamente storica.
In questo ordine di idee, il primo importante episodio che vorrei rilevare è costituito dalla invenzione della geometria proiettiva. Sappiamo che tra i geometri che più spiccano in questa opera si possono ricordare Vittorio

Poncelet, Karl Kristian von Staudt, Jacob Steiner. Mi limiterò ad illustrare l'opera di Poncelet, perché mi sembra che essa sia particolarmente significativa per lo scopo che ho in vista.

Henri Poincaré, nel discorso che tenne al congresso mondiale dei matematici di Parigi, nel 1900, citò Poncelet come un esempio tipico di matematici che lavorano con lo spirito dei geometri, dicendo che era intuitivo non soltanto in modo eccezionale, ma addirittura in modo ostentato.

Mi sembra che la novità introdotta da Poncelet nel campo metodologico si possa descrivere, sia pure in modo rudimentale ed approssimato, dicendo che egli utilizza quello che noi oggi indichiamo come il concetto di invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni. Come è noto, il gruppo è quello delle proiezioni, ed in questo modo Poncelet getta le basi per quella classificazione delle varie geometrie ("ricerche geometriche recenti", le dirà Felix Klein) che verrà data con il programma di Erlangen.

Operativamente, l'innovazione introdotta da Poncelet porta a dimostrare le proprietà delle figure ed i teoremi su casi particolari metrici, e con strumenti classici, ma leggendo, per così dire, la loro validità in un ambito molto più vasto.

Sarebbe troppo lungo esporre qui gli sviluppi della geometria proiettiva, che presero origine dai lavori dei grandi iniziatori, i cui nomi ho fatto poco fa; mi limiterò quindi ad accennare ad alcuni aspetti della ricaduta delle idee della geometria proiettiva sui metodi della scienza geometrica.

Un primo aspetto che vorrei ricordare è l'adozione delle coordinate omogenee; adozione resa necessaria dall'ampliamento dello spazio geometrico, con inclusione degli elementi impropri. Sappiamo tutti che l'impiego delle coordinate omogenee permette di conferire alla trattazione analitica dei fatti proiettivi una grande simmetria, e spesso anche una grande eleganza. E' noto anche che, con l'adozione delle coordinate omogenee, il gruppo delle trasformazioni della geometria proiettiva trova una espressione esauriente nel gruppo delle trasformazioni lineari.

Un secondo fatto, molto importante, è costituito dalla legge di dualità, nel piano e nello spazio. Questa legge fu dapprima considerata come una corrispondenza puramente linguistica, come una legge di trasformazione verbale delle proposizioni geometriche; ma essa fu presto interpretata nell'ambito geometrico come fondata e giustificata da una vera e propria corrispondenza (con particolari caratteristiche) tra punti e rette nel piano, e tra punti e piani nello spazio. In tal modo si accettava anche l'idea che il piano (o rispettivamente lo spazio) potessero avere degli elementi generatori diversi dal punto. E di qui si passò all'ampliamento del concetto di cooordinate, con l'adozione delle coordinate plückeriane di retta nel piano, e di piano nello spazio, ed alle coordinate grassmanniane di retta nello spazio.

Abbiamo quindi, a mio parere, un insieme di progressi nella metodologia geometrica, strettamente collegati con la geometria proiettiva.

Ritornando a Poncelet, vorrei ricordare il suo tentativo di ampliare e rafforzare i metodi della geometria tradizionale con l'enunciazione del suo metodo che egli chiamò "Principio di continuità". Sarebbe interessante

cercare di valutare, con un'analisi storico-psicologica, quanta parte abbia avuto l'immaginazione di Poncelet nel tentativo di costruire questa teoria, con lo scopo di conferirle la dignità di un nuovo metodo di ricerca e di dimostrazione. Sono noti i suoi tentativi di raggiungere in questo modo anche il campo complesso, cercando di unificare, attraverso il suo principio, molte proprietà che la sua intuizione gli faceva vedere come dei fenomeni geometrici apparentemente diversi ma dotati di una profonda unità.
Effettivamente questa unità esiste, ma è una unità formale di trattazione analitica, che può essere rigorosamente vista soltanto con gli strumenti della teoria della funzioni di variabile complessa, quelle che Agostino Cauchy chiamò "funzioni monogene". Sono note le critiche radicali avanzate da Cauchy agli enunciati di Poncelet in questo campo; Cauchy negò validità logica alle argomentazioni di Poncelet, affermando che esse potevano essere accettate soltanto come degli enunciati che oggi diremmo "dotati di grande valore euristico", ma senza validità di dimostrazioni. Ciò che Cauchy afferma è incontestabile, ma occorre anche ricordare che, all'epoca della polemica di cui parliamo, la teoria delle funzioni di variabile complessa non era forse ancora stata sviluppata ad un livello tale da permettere a Poncelet di passare dalle intuizioni, giuste e profonde, alle dimostrazioni rigorose.
Vorrei tuttavia ricordare che ho avuto occasione di incontrare e di lavorare con illustri rappresentanti della scuola di geometria algebrica di stile italiano, e che ho cercato di indagare, nei limiti del possibile, come potessero sorgere in certe menti di altissima statura, le intuizioni che conducevano poi a risultati molto brillanti. E' noto che la geometria algebrica di scuola italiana ha trattato sostanzialmente le funzioni algebriche, cioè certe particolari funzioni implicite della variabile complessa, con un atteggiamento nel quale l'immagine geometrica aveva un posto importantissimo, se non addirittura fondamentale; e ciò non soltanto nel linguaggio adottato per l'esposizione, ma anche, e vorrei dire soprattutto, nel momento della ricerca e della creazione.

4 - Da Riemann al calcolo differenziale assoluto.

Sempre limitandomi a segnalare quelli che penso gli episodi di evoluzione geometrica particolarmente interessanti dal punto di vista della metodologia, vorrei ricordare in secondo luogo l'evoluzione dei metodi della geometria differenziale, che ebbe inizio con la celebre memoria di Bernhard Riemann sulle ipotesi che stanno a fondamento della la geometria. Vorrei dire che questa memoria mi sembra fondamentale da almeno due punti di vista. Il primo è il cambiamento radicale che essa introdusse nella impostazione del concetto stesso di geometria; questa fu svincolata dalla struttura classica, e ricondotta a fondare se stessa dalla analisi del nostro comportamento razionale locale, giungendo così a costruire l'intero spazio per passi successivi, a partire dall'intorno dell'osservatore. Vorrei dire che questo cambiamento investe i metodi fondamentali per fare geometria; e si può osservare che esso è stato reso possibile dall'esistenza di una dottrina (l'analisi matematica) che aveva costruito gli strumenti formali che il genio di Riemann utilizzò per esprimersi. Ma vorrei ricordare anche un secondo aspetto di rivoluzione metodologica, per il quale l'opera di Riemann gettò i semi. Intendo parlare della evoluzione nella espressione dei contenuti geometrici della geometria differenziale, evoluzione che portò alla costruzione dei sistemi formali che oggi indichiamo con il termine generico di "Calcolo tensoriale" e che uno dei suoi fondatori chiamò "Calcolo differenziale assoluto". Si potrebbe intravedere un primo germe di questi metodi nei lavori di Enrico Beltrami, il quale ebbe occasione di incontrare Riemann. Il Beltrami, nel costruire il suo parametro differenziale su una superficie, osserva esplicitamente che la forma analitica esteriore di questo oggetto analitico è indipendente dal sistema di parametri gaussiani che si sceglie sulla superficie; penso di non esagerare dicendo che queste idee di Beltrami trovarono il loro sviluppo metodico nell'opera di Gregorio Ricci Curbastro e del suo allievo Tullio Levi Civita, che fornirono alla Relatività generale gli strumenti per codificare quella ricerca di invarianti che formalizza,con strumenti matematici, la ricerca di obiettività che è forse lo scopo principale della fisica.

5 - Le trasformazioni birazionali.

Lo sviluppo dell'algebra, e soprattutto la maturazione della teoria delle funzioni di variabile complessa, posero nuovi problemi ai cultori di geometria. Infatti nella soluzione di molti problemi geometrici l'algebra esprime le soluzioni con formule che hanno validità anche nel campo complesso; inoltre la trattazione analitica delle trasformazioni della geometria proiettiva viene fatta con funzioni lineari; ma una immediata idea di generalizzazione pone il problema di studiare le trasformazioni che nascono da espressioni analitiche date da funzioni razionali di grado superiore al primo.

Ho già accennato al primo dei problemi; e qui ricordo la idee di Staudt per la rappresentazione reale delle soluzioni complesse di problemi di secondo grado o riconducibili al secondo. Come è noto, altre soluzioni, fondate su principi diversi, furono date da B. Riemann, il quale rappresentò le funzioni algebriche con superfici bilatere chiuse .

Ho parlato di sfuggita dell'aspetto analitico della geometria proiettiva, e del gruppo delle trasformazioni lineari. Si deve a Luigi Cremona la elaborazione del concetto di trasformazione birazionale tra spazi proiettivi, che ha aperto un nuovo capitolo delle geometria. E' noto che il gruppo delle trasformazioni birazionali sta alla base di quella nuova visione della geometria algebrica che portò alla costruzione dei nuovi metodi della teoria delle curve e delle superfici algebriche. Questi nuovi metodi condussero alla costruzione della teoria delle serie lineari di gruppi di punti sulle curve algebriche e delle serie lineari di curve sulle superfici algebriche.

6 - I nuovi simbolismi geometrici.

Abbiamo già accennato alla profonda rivoluzione nei metodi della geometria che è stata provocata dalla nascita della geometria analitica. Non ci soffermiamo ad esporre i punti fondamentali di questa metodica, e ci limitiamo a ricordare che per la sua applicazione vengono scelti degli oggetti geometrici che costituiscono il riferimento. Pertanto si potrebbe dire che, per l'applicazione di questi metodi, occorre eseguire varie operazioni mentali: occorre infatti anzitutto codificare gli enti geometrici, le loro relazioni e le loro proprietà con le convenzioni adottate, ed in relazione al sistema di riferimento fissato.

In secondo luogo occorre applicare i metodi dell'algebra od in generale dell'analisi matematica, per le operazioni di deduzione formale, seguendo le regole sintattiche del linguaggio matematico. Infine occorre decodificare, interpretare i risultati della elaborazione algebrica (o analitica) per rendere evidente il loro significato geometrico, cioè per rendere esplicite le informazioni che si sono ottenute. A rigore, con la interpretazione dei risultati analitici, e la ricerca del loro significato, occorrerebbe verificare che tale significato è "geometrico" nella misura in cui è indipendente dalla scelta (a priori arbitraria) dei sistema di riferimento.In geometria elementare generalmente si supera questo ostacolo facendo riferimento al significato geometrico di ogni operazione analitica che si esegue nel corso della deduzione mediante i calcoli. Rimane tuttavia il fatto che, per la dimostrazione delle proprietà e per la soluzione dei problemi, spesso il percorso tradizionale appare troppo complicato, e soprattutto viziato dalla introduzione di elementi estranei, che hanno poco o nessun legame con le proprietà che si cercano o con i problemi che si vogliono risolvere.

Queste perplessità sono valide non soltanto in relazione alla geometria, ma anche in relazione ad altri campi della scienza, per esempio a quello della fisica e della meccanica razionale; ed abbiamo detto che la strada scelta per superare queste difficoltà è stata l'adozione dei metodi di calcolo tensoriale, maturati nell'ambito della problematica geometrica.

Tuttavia questa non è la sola strada che si possa percorrere per giungere allo scopo. Infatti nel secolo XIX abbiamo assistito alla nascita ed alla evoluzione di vari sistemi di simbolismo che potremmo designare come "calcoli geometrici". Una sommaria elencazione ci porta a ricordare per esempio i metodi sviluppati da Hermann Grassmann nella sua opera intitolata "Ausdehnungslehre", il calcolo baricentrico di A.F. Möbius, il "Calcolo delle equipollenze" di G Bellavitis, il calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton, i calcoli vettoriali di varia scuola, il "Calcolo geometrico" di G.Peano.

Una giustificazione della invenzione e degli sviluppi di questi sistemi di simboli può forse essere trovata nella opportunità di evitare quella strada lunga e complessa di cui abbiamo detto sopra, di codificazione e decodificazione, che si deve percorrere quando si adottino i metodi abituali della geometria analitica classica. D'altra parte questa evoluzione dei metodi ci appare quasi naturale, vista dalla nostra epoca: infatti si potrebbe pensare che in algebra i simboli non vengono utilizzati soltanto per indicare gli oggetti su cui si opera (i numeri di qualche campo opportuno), ma anche per indicare le operazioni su di essi; e le proprietà dei numeri e delle operazioni sono tradotte in leggi sintattiche di impiego dei simboli. Analogamente in logica formale la simbolizzazione, per così dire, diretta dei concetti e delle relazioni fra essi si accompagna alle regole per la costruzione delle formule ben formate, ed alle regole per la deduzione, cioè per la costruzione di altre formule valide. Si comprende quindi come sia stata del tutto naturale anche per la geometria una evoluzione concettuale tendente non soltanto ad indicare con simboli gli enti di cui si parla (cosa che si fa abitualmente) ma anche a dare a questi simboli delle regole sintattiche, in modo che la deduzione non sia affidata soltanto alla logica verbale, ma avvenga con l'applicazione delle regole sintattiche dei simboli adottati. I sistemi creati da Hamilton, da Bellavitis, da Möbius e da Peano possono essere visti in questa luce; questa nostra idea è giustificata anche dal fatto che nella fisica e nella meccanica razionale i metodi di calcolo vettoriale sono abitualmente utilizzati, nella ricerca e nella esposizione manualistica. I sistemi di Hamilton, di Bellavitis e di Peano possono essere giudicati più complicati del calcolo vettoriale abituale; ciò spiega anche il fatto che questi sistemi di calcolo geometrico non sono stati adottati in generale per la ricerca e per la esposizione delle proprietà geometriche. Ciò è stato anche facilitato e giustificato dalla presenza di molti sistemi di notazione e di deduzione, diversi tra loro.

Effettivamente si può dire che i contenuti della geometria classica sono molto numerosi; per dirla con Hans Freundenthal, la geometria abituale euclidea costituisce un contesto molto ricco, che pertanto può essere conosciuto e dominato completamente soltanto con un sistema simbolico abbastanza complicato. A conferma di quanto dico, vorrei confrontare per esempio il numero di assiomi che vengono enunciati per l'assiomatizzazione di una teoria algebrica, per esempio la teoria dei gruppi, ed il numero di assiomi che Hilbert ha enunciato a fondamento della geometria elementare euclidea classica.

Vorrei confortare questa mia opinione analizzando brevemente uno dei sistemi simbolici di cui abbiamo detto, e precisamente calcolo geometrico di G. Peano. Questo autore definisce degli oggetti che egli chiama forme geometriche di prima, seconda e terza specie. Per queste forme geometriche egli definisce delle relazioni e delle operazioni algebriche; particolarmente interessanti sono i due prodotti che egli chiama rispettivamente "progressivo" e "regressivo". Il primo ha molte analogie con i prodotti alterni che sono oggi utilizzati in vari campi di ricerca. Per mezzo di queste operazioni egli riesce a costruire delle forme di specie superiore con prodotti progressivi di forme di specie inferiore, ed a costruire anche le intersezioni di due forme quando la somma delle loro specie superi il 4. E' facile osservare che questo simbolismo si rivela agile, efficiente ed anche in certo modo elegante fino a quando le proprietà considerate ed i problemi proposti appartengono alla geometria affine del piano o dello spazio. Quando Peano si propone di introdurre dei simboli che permettano di dominare anche le proprietà metriche, il numero dei simboli cresce, e cresce il numero delle regole sintattiche che li legano tra loro. Quindi l'utilizzazione del linguaggio diventa meno agile e la decodificazione delle espressioni diventa meno facile.

Tuttavia penso sia bene osservare che l'adozione di simboli e di regole linguistiche è un fenomeno molto difficile da studiare, perché coinvolge

abitudini e gusti, e quindi non si lascia inquadrare in modo completamente razionale. A titolo di esempio si potrebbe osservare che molte proposte che Peano aveva fatto per l'adozione di un simbolismo matematico più razionale di quello in uso ai suoi tempi (ed anche ai nostri) non sono state accettate dai suoi contemporanei, ma si trovano adottate quasi letteralmente in certi linguaggi di programmazione dei calcolatori elettronici, ed anche in certe raccomandazioni che l'associazione matematica americana dirama agli autori degli articoli inviati per la pubblicazione.
Non interessa qui proseguire in questa analisi, la quale d'altronde è già stata fatta egregiamente da altri autori. A me interessa soltanto sottolineare il fatto che la geometria del secolo XIX ha dato un contributo molto importante alla evoluzione dei metodi matematici, anche per quanto riguarda i simbolismi di rappresentazione e di deduzione. Si potrebbe concludere che in matematica (come in altri campi, del resto) la specializzazione rigorosa ed esclusiva non pare sempre utile: un progresso che si ottiene in un ramo, fa progredire anche gli altri, se i suoi cultori hanno una apertura mentale sufficiente per comprenderlo e per giovarsene.